MA2 – „písemná" přednáška „za" 23.3.2020

I. Konvergence v R^n, a k tomu „užitečné" množiny v R^n:

V R^n už máme (minulá přednáška) vzdálenost, tak již můžeme definovat limitu posloupnosti bodů v R^n, a také limitu, resp. spojitost funkce n proměnných – ale nejdříve si připomíme jiště pomocné nástroje k vyjádření toho, co znamená limita v R^n – podobně jako v R^1, okolí bodu, a popíšeme, k jakým bodům se můžeme při studování limity funkce n-proměnných „přiblížit": (tj. počítat limitu můžeme v „jakých" bodech?)

Definice 1.

Okolí bodu $a \in R^n$:

nechť $a \in R^n$, $\delta > 0$; pak

obyčejné okolí bodu a (o poloměru $\delta > 0$) je $U(a,\delta) = \{x \in R^n; d_n(a,x) < \delta\}$

prstencové okolí bodu a je $P(a,\delta) = \{x \in R^n; 0 < d_n(a,x) < \delta\}$
$(= U(a,\delta) \setminus \{a\})$

Okolí v R^2, R^3 (pro představu)

$U(a,\delta)$ je v R^2 kruh (bez hranice) o středu v bodě $\underline{a}$ a poloměru δ,
v R^3 „kulička" o středu v bodě $\underline{a}$ a poloměru δ

$P(a,\delta)$ je v R^2 kruh o poloměru $\delta > 0$ a středu $\underline{a}$, ale „bez $\underline{a}$"
analog. v R^3 „kulička" o středu $\underline{a}$ a poloměru $\delta > 0$, „bez $\underline{a}$"

Definice 2 – limita posloupnosti bodů $x^{(k)} \in R^n$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$

$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in R^n$, když platí:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in N \; \forall k > k_0 : \; d_m(x^{(k)}, x) < \varepsilon$

(„lidově": když $k \to \infty$, $x^{(k)}$ se přibližují k x – vzdálenost „mizí")

Ekvivalentně (problémek – analogické limitě vektorové funkce jedné proměnné – zkuste promyslet)

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \iff \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{pro } \forall i = 1, 2, \dots n$$

(zde $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$)
(dolo[illegible] je vlastně i návod k výpočtu limity posloupnosti)

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{1-n^2}{1+n^2} \right) = (0, 1, -1)$$

(neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{1+n^2} = -1$)

II. Limita funkce $f : M \subset R^n \to R$

Abychom mohli uvažovat $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pro funkci jedné proměnné, $f(x)$ byla definovaná v $P(a, \delta)$, případně, pokud f byla definovaná jen v $P^+(a, \delta)$ (nebo $P^-(a, \delta)$), mohli jsme zkoumat t.zv. jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to a-} f(x)$).

V „jakých" bodech budeme nyní zkoumat limitu funkce „f n-proměnných? Je třeba „charakterizovat" možnost se k „limitnímu" bodu se „přiblížit":

<u>Definice</u>: nechť $M \subset R^n$; $M \neq \emptyset$; pak

1) $\underline{a} \in M$ se nazývá <u>vnitřní bod</u> množiny M, ex.-li okolí $U(a,\delta) \subset M$;

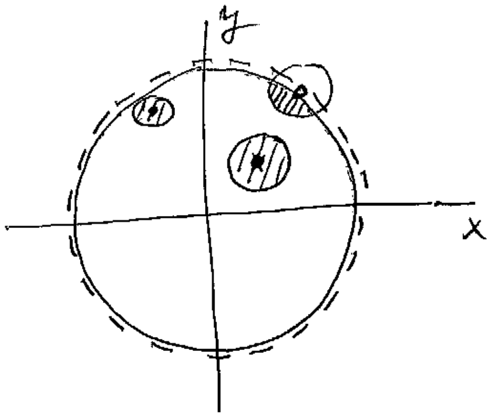
2) $\underline{a}$ je <u>hromadný bod</u> množiny M (někdy se také nazývá limitní bod M), jestliže platí:
$\forall\, P(a,\delta)$ je $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$
(tj. v libovolném okolí bodu $\underline{a}$ je „nějaký" bod z M)

a pak <u>ekvivalentně</u> (promyslete – problémek[4]):

$\underline{a}$ je hromadný bod množiny M, jestliže existuje posloupnost $\{x^{(k)}\}$, $x^{(k)} \in M$, $k=1,2..$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ (proto název „limitní" bod M)

<u>Příklady</u>:

1. Je dána funkce $f(x,y) = \ln\left(1-(x^2+y^2)\right)$, pak
$Df = \{[x,y] \in R^2;\ x^2+y^2 < 1\}$
(tj. kruh o poloměru $r=1$ a středu v $[0,0]$ bez kružnice $x^2+y^2=1$)

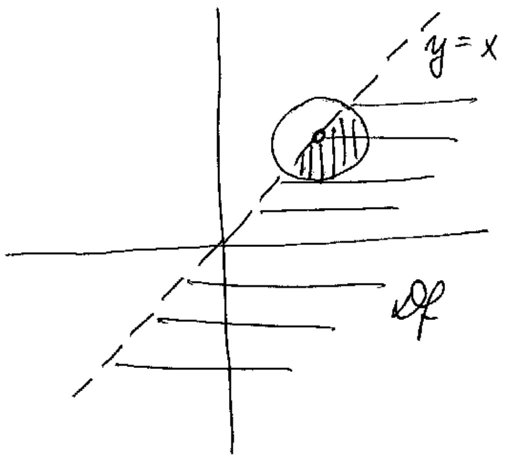


Libovolný bod z Df je vnitřním bodem Df;
a dále, body kružnice o rovnici $x^2+y^2=1$ jsou hromadné body Df

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $D_f = \{[x,y] \in R^2;\ [x,y] \neq [0,0]\}$;

počátek $O=[0,0]$ je ale hromadný bod D_f – neboť pro libovolné okolí $P(0,\delta)$ platí: $P(0,\delta) \cap D_f = P(0,\delta) \neq \emptyset$ (neboť $P(0,\delta) \subset D_f$)

3. $f(x,y) = \ln(x-y)$, $D_f = \{[x,y];\ x-y>0\}$ (tedy, pro body $[x,y] \in D_f$ platí: $x>y$):



všechny body z D_f jsou body vnitřní, body přímky $y=x$, tj. body $[x,x]$, $x \in R$, jsou hromadné body D_f (viz obrázek)

A snad z uvedených příkladů je „vidět", že limita funkce f bude „mít smysl" buď ve vnitřních bodech D_f (ty jsou též body hromadné), nebo i v hromadných bodech D_f, které nejsou vnitřními body, ale lze se k nim „přiblížit".

A je užitečné označení:

Množinu všech hromadných bodů množiny $M \subset R^n$, $M \neq \emptyset$, budeme označovat M'.

A nyní už můžeme definovat limitu funkce n-proměnných (a pojem limity nezávisí i spojitost takové funkce – jako „dříve" u funkcí jedné proměnné)

Definice limity funkce více proměnných:

Mějme funkci $f: M \subset R^n \to R$, $M \neq \emptyset$, $a \in M'$

Definice 1 (vlastní limita f v bodě $\underline{a}$ vzhledem k množině M)

Fce f má v bodě $\underline{a} \in M'$ vlastní limitu $L \in R$ vzhledem k M – – píšeme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L$, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underline{\forall x \in M}:\ 0 < \rho_n(x,a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

nebo pomocí okolí:

$$\forall\, \mathcal{U}(L,\varepsilon)(\subset R)\ \exists\, \mathcal{P}(a,\delta)(\subset R^n)\ \forall x \in \mathcal{P}(a) \cap M:\ f(x) \in \mathcal{U}(L,\varepsilon)$$

Definice 2 (nevlastní limita f v bodě $\underline{a}$ vzhledem k M)

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \underset{(-)}{+}\infty$, když platí:

$$\forall K\ (>0)\ (<0)\ \exists\, \mathcal{P}(a,\delta)\ \forall x \in \mathcal{P}(a,\delta) \cap M:\ f(x) > K\ \ (f(x) < K)$$

nebo:

$$\forall K\ (>0; <0)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M: 0 < \rho_n(x,a) < \delta \Rightarrow f(x) > K\ \ (<K)$$

Poznámka 1. limita f v nevlastním „bodě" zde v R^n, $n > 1$ „nemá smysl" – nedefinuje se!

Poznámka 2. a) Vzhledem k tomu, že metrika (vzdálenost) v R^n má stejné vlastnosti jako vzdálenost v R, tak platí věty o limitě součtu, součinu, podílu funkcí více proměnných – tj. platí (stejně jako v R) – aritmetika limit v R^* (R a $\pm\infty$ limity)

b) Věta o limitě složené funkce

(také důležitá pro výpočet limit); zatím budeme větu formulovat pro složenou funkci, kde vnitřní funkce může být funkce více proměnných, a vnější funkce je funkce jedné proměnné, tj.

Věta (o limitě složené funkce):

nechť 1) $g: M \subset R^n \to R$, $a \in M'$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = b$ $(\in R^*)$

2) existuje $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L$ $(\in R^*)$

(tj. f je definována v „nějakém" $P(b)$)

3) $g(x) \neq b$ pro $x \in P(a) \cap M$

nebo 4) $f(y)$ je spojitá v bodě $y = b$ $(\in R)$.

Pak existuje i $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(g(x))$ a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(g(x)) = L$.

c) dále je „užitečná" i věta o limitě sevřené funkce

Věta: nechť $f, g, h: M \subset R^n \to R$, a nechť $a \in M'$, a

(i) $g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$ pro $x \in P(a) \cap M$;

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} h(x) = L \in R$;

Potom existuje i $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L$.

Analogicky lze formulovat větu i pro limity nevlastní (zde stačí jen jeden „strážník" – analogicky jako u funkce jedné proměnné) a pro důkaz neexistence limity funkce důležitá

<u>Věta:</u> Nechť $f: M \subset R^n \to R$, $M_1 \subset M$, $a \in M_1' \cap M'$;

pak platí: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M_1}} f(x) = L$. $(L \in R, \pm\infty)$

Tedy – „lidově" – pokud existuje limita vzhledem k „větší" množině, pak funkce má tutéž limitu i vzhledem k množině „menší", tj. která je částí té množiny první)

<u>a užití této věty:</u>

Najdeme-li množiny $M_1 \neq M_2$, $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$, $a \in M_1' \cap M_2' \cap M$ takové, že $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M_1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M_2}} f(x)$, pak funkce f nemá limitu v bodě $\underline{a}$ vzhledem k M!

(Vidíte, doufám, analogii se situací, kdy se u funkce jedné proměnné lišily jednostranné limity v bodě $a \in R$, nebo, když jsme našli posloupnosti $x_n \to a$, $\tilde{x}_n \to a$ takové, že $x_n \neq a$, $\tilde{x}_n \neq a$ a $\lim f(x_n) \neq \lim f(\tilde{x}_n)$ (Heineho věta), fce f pak neměla limitu v bodě $\underline{a}$.)

<u>Poznámka ke značení limity f v bodě $a \in M'$, $f: M \subset R^n \to R$:</u>

Je-li $\underline{a}$ vnitřní bod množiny M, tj. existuje $P(a,\delta) \subset M$, pak nebudeme říkat „limita vzhledem k M" – jen limita v bodě $\underline{a}$ (jako dříve) a psát

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ (\in R, \pm\infty)$$

<u>Příklady výpočtu limit</u> – po definici spojitosti fce v bodě.

Spojitost funkce v bodě $a \in M$ (vzhledem k množině)

Definice: Mějme funkci $f: M \subset R^n \to R$, $a \in M \cap M'$; říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $\underline{a}$ vzhledem k M, když $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = f(a)$.

Je-li $\underline{a}$ vnitřní bod M, pak říkáme, že f je spojitá v bodě $\underline{a}$.

A vzhledem ke „stejné" definici jako u funkcí jedné proměnné, platí opět „aritmetika" spojitosti a spojitost složené funkce, je-li (zatím) vnější funkce funkcí jen jedné proměnné. „Obecný případ", tedy bude vnější funkce funkcí více proměnných, také probereme (později – vnitřní funkce pak je vektorová funkce více proměnných, a asi už je zřejmé, že limity i spojitost „vektoru" bude ekvivalentní s limitou a spojitostí jednotlivých „složek" vektoru – už jsme viděli u vektorových funkcí jedné proměnné – asi je už jasné, že i zde to bude tak „fungovat")

A nyní několik příkladů:

A ještě nejprve užitečné připomenutí: z definice $d_n(x,y)$ v R^n plyne: $d_n(x,a) < \delta \Rightarrow |x_i - a_i| < \delta \quad \forall i$, a obráceně,
$|x_i - a_i| < \frac{\delta}{n} \ \forall i \Rightarrow d_n(x,a) < \delta$,

tedy (pro „počty"): $x \to a$ lze chápat" $x_i \to a_i$, $i = 1, 2, .. n$.

1. $f_1(x,y) = 4-(x^2+y^2)$:

$D_{f_1} = R^2$, f je spojitá v R^2, limitu lze počítat dosazením

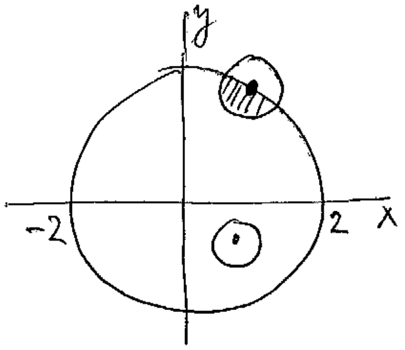
$$\left(\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(4-(x^2+y^2)\right) = 4-(a^2+b^2) \right)$$

$\iff x \to a,\ y \to b$

2. $f_2(x,y) = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$

$M = D_f = \{[x,y];\ 4-(x^2+y^2) \geq 0\} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \leqq 4\}$

množina vnitřních bodů D_f : $\{[x,y];\ x^2+y^2<4\}$



(kruh bez „kružnice" o poloměru $2=r$)

kružnice $\{[x,y];\ x^2+y^2=4\}$ je také množina hromadných bodů (už ne vnitřních), takže zde

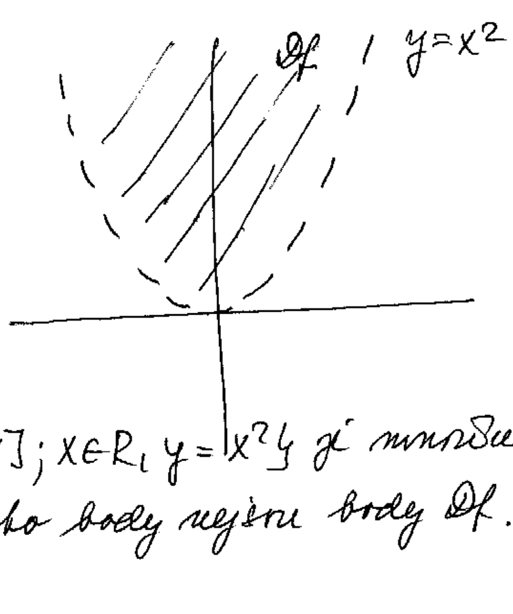
$M = M'$

f je spojitá v každém bodě z D_f vzhledem k D_f

3. $f_3(x,y) = \ln(y-x^2)$

$D_f = \{[x,y] \in R^2;\ y-x^2>0\}$

$(y>x^2)$



f je spojitá v D_f (lib. bod z D_f je vnitřním bodem D_f;

body paraboly $y=x^2$, tj. $\{[x,y];\ x \in R,\ y=x^2\}$ je množina hromadných bodů D_f, i když tyto body nejsou body D_f.

a např. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ y>x^2}} \ln(y-x^2) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to 0+} \ln t = -\infty$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (y-x^2) = 1-1=0$

4) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$\mathcal{D}f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$; $0=[0,0]$ je hromadný bod $\mathcal{D}f$, a

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

$(x^2+y^2=t$ a $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow t\to 0)$

a f je spojitá v $\mathcal{D}f$ (limita „dosazením") ;

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

$\mathcal{D}f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$; f je spojitá v $\mathcal{D}f$, $[0,0]$ je hromadný bod, (nebo „limitní" bod)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1}{t} = +\infty$ $(x^2+y^2=t\to 0$ pro $(x,y)\to(0,0))$

6) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$\mathcal{D}f = R^2 \setminus \{[0,0]\}$, f je (opět) spojitá v $\mathcal{D}f$,
$[0,0]$ je hromadný bod $\mathcal{D}f$, tedy lze

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = „\dfrac{0}{0}"$ – a co teď?
nemáme (a nebudeme mít) „l'Hospitala"

– takové limity jsou u funkcí více proměnných obtížné –
buď lze odhadovat (VOS), nebo se často ukáže, že limita neexistuje

„Obtížné" limity nebudeme počítat, jen jich" několik ukážu, „aby bylo vidět, v čem spočívají ty „naše" obtíže s limitami a třeba nám to pomůže i trochu více „vidět" vlastnosti funkcí více proměnných, v čem mohou být „jiné" než funkce jedné proměnné, a na co je třeba dávat pozor!

a „naše" příklad: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = ?$

odhad: (tj. shazování) – důležitá a užitečná nerovnost je

$$(*) \qquad |xy| \leq x^2+y^2 \quad \left(\text{dokonce } |xy| \leq \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

a tedy můžeme najít „shazováky":

$$\left. 0 \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y| \right\} \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow}$$

a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 .$$

7. A co tedy by „jen" $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{\text{opět}}{=} „\frac{0}{0}"$ – ale „vidíme" z (*),

že asi $x.y$ bude „řádově" stejná „0" jako x^2+y^2!

A pak často limita nemusí existovat!

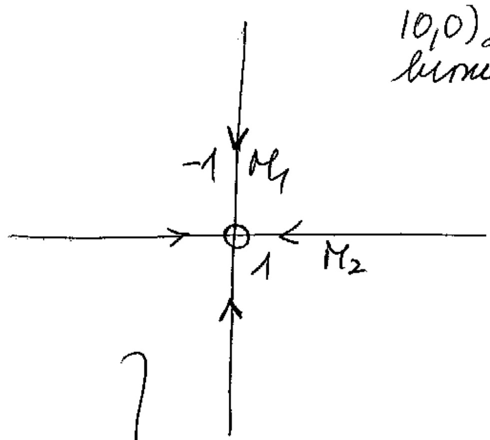
Zde vezmeme $M_k = \{[x,y];\ y = kx,\ x \neq 0\}$; pak $[0,0] \in M_k'$

a $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in M_k}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k.x^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2} \rightarrow$ tj. různé limity pro „různá" k!

Tedy, funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ nemá v bodě $[0,0]$ limitu (dle věty o limitě funkce vzhledem k podmnožinám)

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = „\frac{0}{0}“$ – opět tato limita neexistuje, $(0,0)$ je hromadný bod D_f

neboť: tedy
$M_1 = \{[x,y];\ x=0\}$ (osa y)
pak $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$



a pro $M_2 = \{[x,y];\ y=0\}$ (osa x) $\Big\}\ \neq\ !$
je $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Teď bychom měli shrnout vlastnosti spojitých funkcí (tedy jak to máme definováno) ve zvolených množinách v R^n (jako v MA 1), ale nechme si toto na pozdější „praxi“ přednášce, a jistě se teď podíváme na to, jak se dá pokračovat (nebo spíše nedá) se zobecněním základních pojmů z diferenciálního počtu fcí jedné proměnné – chybí derivace funkce více proměnných – tj. lze takto definovat $(x \in U(a) \subset R^n)$

$$(*)\quad f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ?? \quad (U(a) \subset D_f)$$

„nepůjde toto udělat – neboť neumíme dělit vektorem $(x-a)$“!

Co tedy lze udělat „pro" rozšíření důležitého pojmu „derivace" i na funkce více proměnných?

Aby ve jmenovateli výrazu pro „derivování" bylo jen „reálné číslo" a ne vektor, jako v (*) – můžeme se „vyhnout" při limitě v (*) jen jednou proměnnou, takže vlastně definovat lze limitu v (*) je vzhledem k podmnožinám Df, kde se mění jen jedna proměnná (asi nejjednodušší případ) a bod $\underline{a}$ je též prvek i hromadný bod těchto množin.

Tedy přesněji: (označme i-pevné, a jen x_i bude proměnná)

Definice: Nechť $\underline{a}$ je vnitřní bod M; $f: M \subset R^n \longrightarrow R$. Pak limitu (existuje-li)

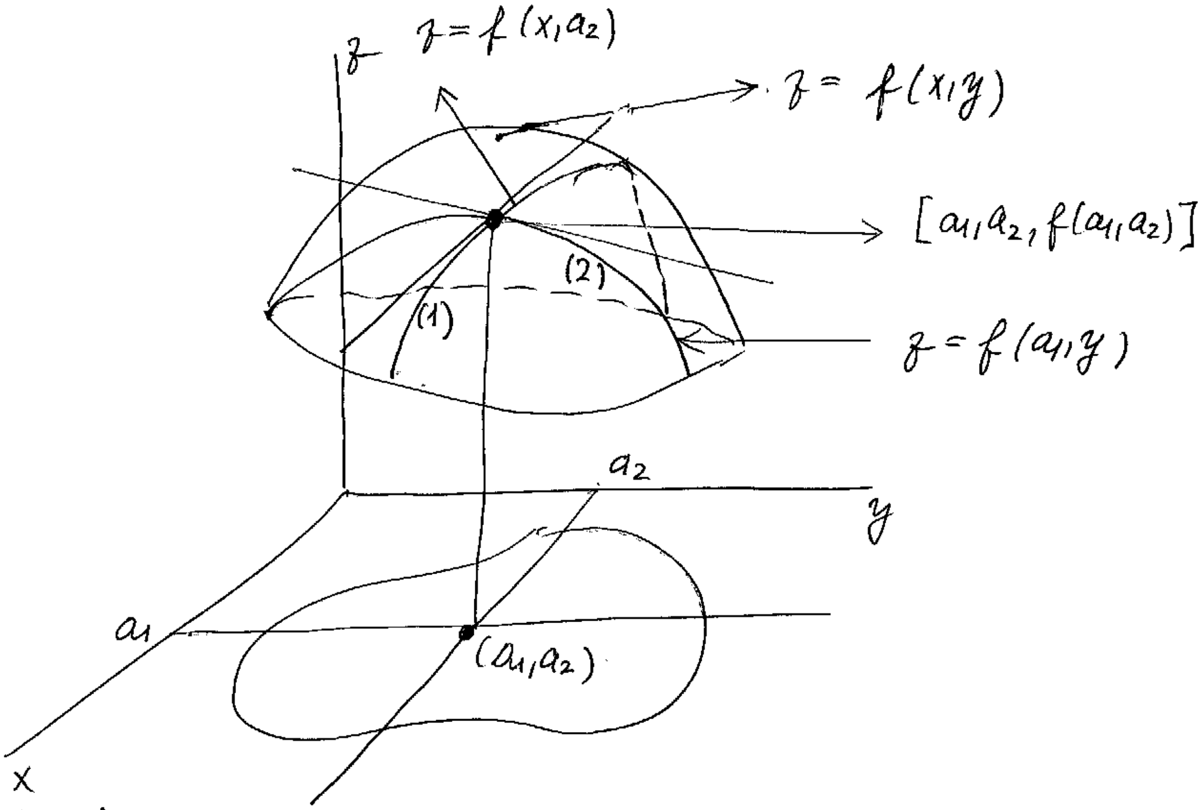
$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, .. a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .. a_n) - f(a_1, ... a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, .. a_n)}{x_i - a_i}$$

nazýváme parciální derivací funkce f v bodě a podle x_i a značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, .., a_n) \left(= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ krátce}\right)$

(také moderněji někdy $f_{x_i}(a)$).

Ukažme si, co „parciální" derivace funkce „znamenají", „co popisují" na funkci dvou proměnných.

Uvažujme funkci $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{U}(a_1,a_2)$



Pak vlastně je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \frac{d}{dx} f(x,a_2)\Big|_{x=a_1}$$

(graf (1))

– tj. geometricky "derivace funkce proměnné „x", jejíž graf je řez grafu funkce f rovinou $y = a_2$

(tj. směrnice tečny k tomuto řezu, a tedy i k „ploše", která je grafem fce $f(x,y)$), v bodě $[a_1,a_2,f(a_1,a_2)] = A$

a totéž lze si představit i o $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \frac{d}{dy} f(a_1,y)\Big|_{y=a_2}$

a tedy geometricky – dostaneme směrnici tečny ke grafu v bodě A řezu grafu fce f rovinou $x = a_1$. (graf (2)) (na obr.)

V definici $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ parciální derivace fce f v bodě $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ se často užívá i zápis s „h", tj.:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,\dots,a_n)}{h},$$

nebo „jednodušší" zápis: $\vec{h_i} = (0,\dots,0,\overset{i}{h},0\dots0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+\vec{h_i})-f(a)}{h}$$

Parciální derivace jsou vlastně derivace funkce jedné proměnné, tedy je „umíme" počítat – jen se při výpočtu ze začátku „pletou" ostatní proměnné! – – je třeba natrénovat to, že vidíte jen jednu proměnnou, a to tu, dle které se má derivovat, a ostatní proměnné je třeba naučit se vnímat jako konstanty. Chce to trochu „trénovat"!

<u>Příklady výpočtu parciálních derivací funkce.</u>

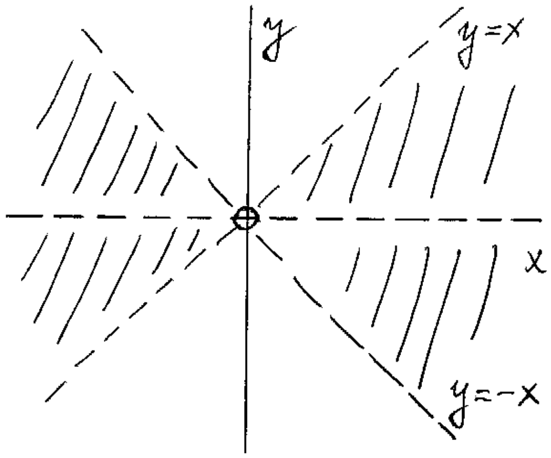
1. $f(x,y) = x^2+y^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

<u>Poznámka:</u> Opět, jako u funkcí jedné proměnné, parciální derivace můžeme počítat v bodech (x,y), kde existují, a považovat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ za funkce proměnných (x,y)

2. $f(x,y) = \ln(y-x^2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}(-2x)\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot 1$$

pro $(x,y) \in \mathcal{D}f = \{[x,y]\ ;\ y-x^2>0\}$



3. $f(x,y) = 2x^2y + \frac{x}{y} + \ln(x^2-y^2)$

$\mathcal{D}f = \{[x,y]\ ;\ y\neq 0 \text{ a } x^2>y^2\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x \quad \text{v } \mathcal{D}f\ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - \frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2-y^2}\cdot(-2y) \quad \text{v } \mathcal{D}f\ ;$$

a derivace v bodě $(2,1)\in\mathcal{D}f$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 4.2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4-1}\cdot 4 = \frac{13}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2.4 - \frac{2}{1} + \frac{1}{4-1}(-2) = \frac{16}{3}$$

Chápeme-li $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jako funkce, definované tam, kde funkce $f(x,y)$ má vlastní parciální derivace, pak, pokud existují parciální derivace těchto „prvních" parciálních derivací, můžeme „dále" derivovat a dostáváme t.zv. parciální derivace vyšších řádů; parciální derivace druhého řádu fce $f(x,y)$ jsou:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\ , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\ , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y).$$

Derivace: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ – <u>nesmíšené derivace</u>
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ – <u>smíšené derivace</u>
, druhého řádu

<u>Příklad:</u> $f(x,y) = \ln(y - x^2)$ v $\mathcal{D}f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot(-2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2x}{y-x^2}\right) = \frac{-2(x^2+y)}{(y-x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(y-x^2)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2x}{y-x^2}\right) = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y-x^2}\right) = \frac{2x}{(y-x^2)^2} \end{aligned}\right\} \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)}$$

Rovnost druhých smíšených derivací není náhoda – platí, že pokud derivace smíšená druhého řádu je spojitá, pak nezáleží na pořadí derivování (viz věta)

Dále, pokud považujeme derivace druhého řádu za funkce, můžeme dále derivovat ", pokud dané derivace existují" – dostáváme parciální derivace třetího řádu, analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů i u funkcí n-proměnných: $f(x_1, x_2, .., x_n)$; pak lze

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, .., x_n)$ – derivace 1. řádu, $i = 1, 2, .., n$, $X = (x_1, .., x_n)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(X)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(X)$

Platí:

Věta (o zaměnnosti parciálních derivací)

Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ spojitá v bodě a, pak existuje i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ $\left(i,j = 1,\dots,n\,,\ f: M \subset R^n \to R \right)$
($\underline{a}$ je vnitřní bod M)

Analogicky toto lze říci i pro derivace řádu vyšších – je-li p-tá smíšená derivace funkce spojitá v bodě $\underline{a}$, pak nezáleží na pořadí derivování.

Poslední poznámka

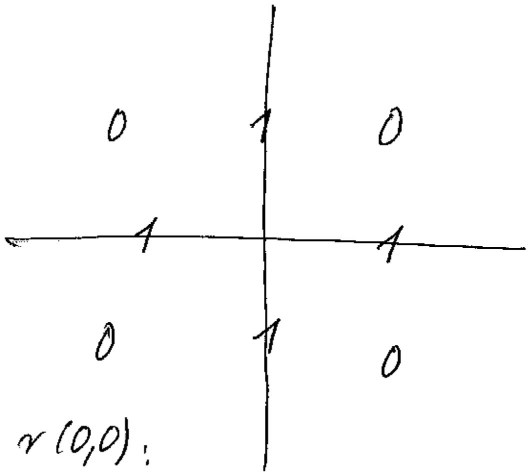
Když $f: M \subset R \to R$ měla v bodě $\underline{a}$ vlastní derivaci $f'(a) \in R$, pak f byla spojitá v bodě a, a platilo, že
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a)$, kde $\lim_{x \to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$,
tedy $f(x)$ bylo možno v okolí bodu a lineárně aproximovat (s malou chybou), graficky – ke grafu existovala tečna v bodě $[a, f(a)]$.

U funkce více proměnných ale bohužel parciální derivace nezaručují ani spojitost; existence (jen) parciálních derivací je „slabší" vlastnost než existence $f'(a)$ u funkcí jedné proměnné. Ukážeme si příklad.

– Příští přednášku ukážeme, jak toto „vyřešit" –
– zavede se pojem „funkce diferencovatelná v bodě" a totální diferenciál.

<u>Příklad</u> funkce, u které existence parciálních derivací „nezaručí" spojitost :

$$f(x,y)=\begin{cases} 0\ , & x\cdot y \neq 0 \\ 1\ , & x\cdot y = 0 \end{cases}$$



f není spojitá v bodě $(0,0)$, protože ani neexistuje limita v $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1\ , \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim 0 = 0 \quad !$$

neexistuje-li $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pak f nemůže být spojitá v $(0,0)$.

Ale přitom f má parciální derivace v bodě $(0,0)$ – obě!

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$\text{a i } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1-1}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \quad !$$